Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Matemáticas
Nivel superior
Prueba 1

Lunes 12 de noviembre de 2018 (tarde)

Número de convocatoria del alumno

2 horas

Instrucciones para los alumnos

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba no se permite el uso de ninguna calculadora.
- Sección A: conteste todas las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto.
- Sección B: conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Escriba su número de convocatoria en la parte delantera del cuadernillo de respuestas, y adjúntelo a este cuestionario de examen y a su portada utilizando los cordeles provistos.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de matemáticas NS y de ampliación de matemáticas NS** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[100 puntos]**.

8818 – 7225

No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

Sección A

Conteste **todas** las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto. De ser necesario, se puede continuar desarrollando la respuesta en el espacio que queda debajo de las líneas.

1. [Puntuación máxima: 6]

Considere dos sucesos, A y B tal que $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A' \cap B) = 0{,}4$ y $\mathrm{P}(A \cap B) = 0{,}1$.

(a) Dibujando un diagrama de Venn, o de cualquier otro modo, halle $\mathrm{P}(A \cup B)$. [3]

(b) Muestre que los sucesos A y B no son independientes. [3]

2. [Puntuación máxima: 5]

De un grupo compuesto por cuatro chicos y cuatro chicas se van a elegir a cuatro integrantes para formar un equipo.

(a) Halle el número de equipos distintos que se pueden formar. [3]

(b) Halle el número de equipos distintos que se pueden formar, sabiendo que en el equipo tiene que haber al menos una chica y al menos un chico. [2]

3. [Puntuación máxima: 7]

Considere la función $g(x) = 4\cos x + 1$, $a \le x \le \frac{\pi}{2}$, donde $a < \frac{\pi}{2}$.

(a) Para $a = -\frac{\pi}{2}$, dibuje aproximadamente el gráfico de $y = g(x)$. Indique claramente cuáles son los valores máximos y mínimos de esta función. [3]

(b) Escriba cuál es el valor más pequeño de a para el que g tiene inversa. [1]

(c) Para el valor de a que ha hallado en el apartado (b),

(i) escriba el dominio de g^{-1};

(ii) halle una expresión para $g^{-1}(x)$. [3]

4. [Puntuación máxima: 7]

Considere el siguiente sistema de ecuaciones, donde $a \in \mathbb{R}$.

$$\begin{gathered} 2x + 4y - z = 10 \\ x + 2y + az = 5 \\ 5x + 12y = 2a. \end{gathered}$$

(a) Halle el valor de a para el cual este sistema de ecuaciones no tiene una solución única. [2]

(b) Halle la solución de este sistema de ecuaciones para $a = 2$. [5]

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

5. [Puntuación máxima: 6]

Los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ están definidos por $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -t \\ 4t \end{pmatrix}$, donde $t \in \mathbb{R}$.

(a) Halle $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ en función de t y luego simplifique dicha expresión. [2]

(b) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, halle todos los valores de t para los cuales el ángulo que forman $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ es obtuso. [4]

6. [Puntuación máxima: 6]

Utilice la inducción matemática para demostrar que $\sum_{r=1}^{n} r(r!) = (n+1)! - 1$, para $n \in \mathbb{Z}^{+}$.

7. [Puntuación máxima: 6]

Considere las curvas C_1 y C_2 definidas del siguiente modo

$$C_1 : xy = 4\,,\, x > 0$$
$$C_2 : y^2 - x^2 = 2\,,\, x > 0$$

(a) Utilizando la derivación implícita o de cualquier otro modo, halle para cada una de estas curvas $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ en función de x y de y. [4]

Sea $\mathrm{P}(a\,,\,b)$ el único punto en el que se cortan las curvas C_1 y C_2.

(b) Muestre que la tangente a C_1 en P es perpendicular a la tangente a C_2 en P. [2]

8. [Puntuación máxima: 7]

Considere la ecuación $z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d = 0$, donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y $z \in \mathbb{C}$.
Dos de las raíces de esta ecuación son $\log_2 6$ e $\mathrm{i}\sqrt{3}$; además, la suma de todas las raíces es igual a $3 + \log_2 3$.
Muestre que $6a + d + 12 = 0$.

No escriba soluciones en esta página.

Sección B

Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada respuesta.

9. [Puntuación máxima: 15]

Considere el triángulo OAB, tal que O tiene por coordenadas $(0, 0, 0)$, A tiene por coordenadas $(0, 1, 2)$ y B tiene por coordenadas $(2b, 0, b-1)$, donde $b < 0$.

(a) Halle, en función de b, la ecuación cartesiana del plano Π que contiene a este triángulo. [5]

Sea M el punto medio del segmento de recta $[\mathrm{OB}]$.

(b) Halle, en función de b, la ecuación de la recta L que pasa por M y es perpendicular al plano Π. [3]

(c) Muestre que L no corta al eje y para ningún valor negativo de b. [7]

No escriba soluciones en esta página.

10. [Puntuación máxima: 19]

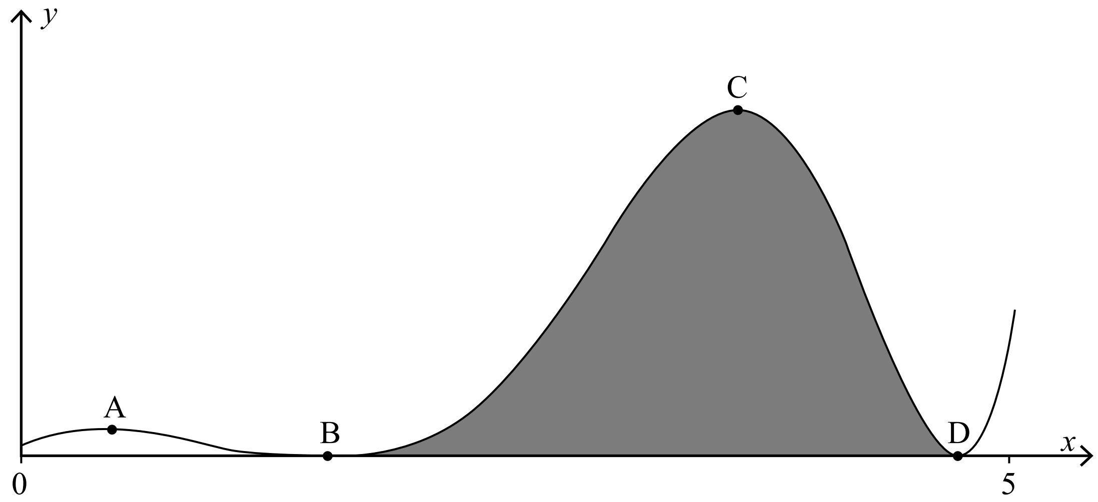
(a) Utilice la integración por partes para mostrar que

$$\int e^x \cos 2x dx = \frac{2e^x}{5} \operatorname{sen} 2x + \frac{e^x}{5} \cos 2x + c,\ c \in \mathbb{R}.$$ [5]

(b) A partir de lo anterior, muestre que

$$\int e^x \cos^2 x dx = \frac{e^x}{5} \operatorname{sen} 2x + \frac{e^x}{10} \cos 2x + \frac{e^x}{2} + c,\ c \in \mathbb{R}.$$ [3]

La función f se define de la siguiente forma $f(x) = e^x \cos^2 x$, donde $0 \le x \le 5$. En el siguiente gráfico se muestra la curva $y = f(x)$. Esta curva tiene máximos locales en A y en C y toca al eje x en B y en D.



(c) Halle la coordenada x de A y de C, dando las respuestas en la forma $a + \arctan b$, donde $a, b \in \mathbb{R}$. [6]

(d) Halle el área de la región delimitada por esta curva y por el eje x entre B y D, como aparece sombreada en la figura. [5]

No escriba soluciones en esta página.

11. [Puntuación máxima: 16]

(a) Halle todas las raíces de $z^{24} = 1$ que cumplen la condición $0 < \arg(z) < \frac{\pi}{2}$. Exprese las respuestas en la forma $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, donde $r, \theta \in \mathbb{R}^+$. [5]

(b) Sea S la suma de las raíces halladas en la parte (a).

(i) Muestre que $\operatorname{Re} S = \operatorname{Im} S$.

(ii) Escribiendo $\frac{\pi}{12}$ como $\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)$, halle el valor de $\cos\frac{\pi}{12}$ en la forma $\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{c}$, donde a, b y c son números enteros.

(iii) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, muestre que $S = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{2}\right)\left(1 + \sqrt{3}\right)(1 + \mathrm{i})$. [11]